Prirodno-matematički fakultet
Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za VII razred osnovne škole

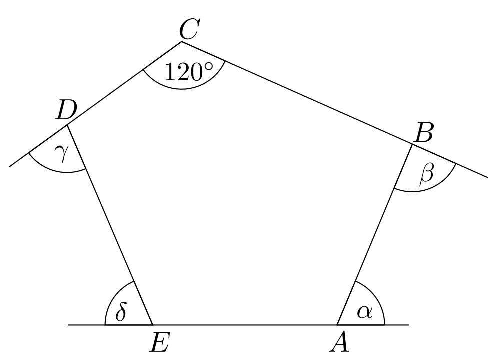
1. Na testu iz matematike, prosječna ocjena jednog odjeljenja u kome je više od 30, a manje od 50 učenika, iznosila je 3.6. Pri tome, djevojčice su postigle prosječnu ocjenu 4.00, a dječaci prosječnu ocjenu 3.25. Koliko je u tom odjeljenju djevojčica, a koliko dječaka?

Rješenje: Označimo sa x broj djevojčica, a sa y broj dječaka. Tada iz uslova zadatka slijedi

$$\frac{4x+3.25y}{x+y}=3.6,$$

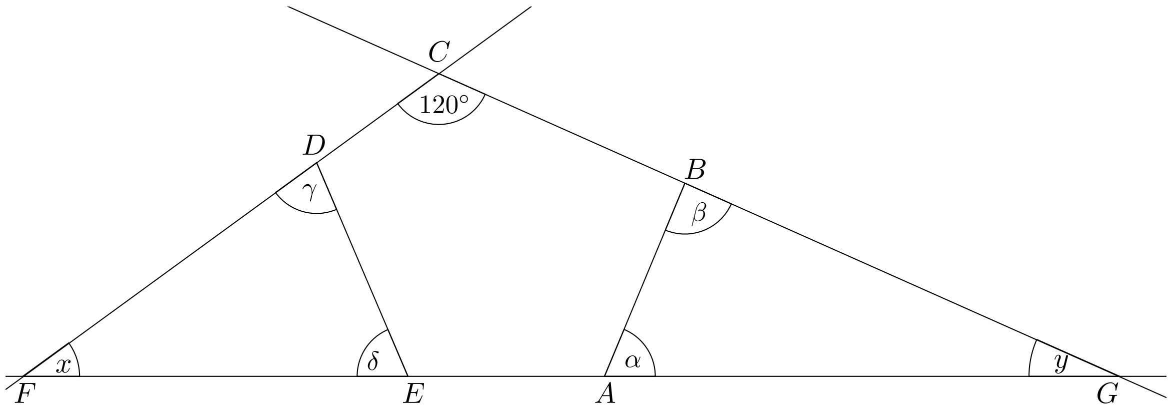
odakle dobijamo $4x+3.25y = 3.6x+3.6y$, odnosno $0.4x = 0.35y$. Odavde slijedi da je $8x = 7y$, pa je x djeljivo sa 7, tj. $x = 7m$, za neki prirodan broj m, odakle dobijamo $y = 8m$. To znači da je u razredu ukupno $15m$ učenika. Jedini broj koji je djeljiv sa 15 i veći je od 30, a manji je od 50, je broj 45. Dakle, u odjeljenju je ukupno 45 učenika i $m = 3$, pa je broj djevojčica $x = 7 \cdot 3 = 21$, a broj dječaka je $y = 8 \cdot 3 = 24$. □

2. Na slici je dat petougao $ABCDE$. Odrediti vrijednost zbira uglova $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.



Slika 1.

Rješenje: Neka je F tačka presjeka polupravih CD i AE, a G tačka presjeka polupravih EA i CB (slika 2.).



Slika 2.

Označimo sa x ugao kod tjemena F, a sa y ugao kod tjemena G. Zbir unutrašnjih uglova trougla jednak $180°$, pa iz trouglova $\triangle FED$, $\triangle AGB$ i $\triangle FGC$ dobijamo

$$x + \delta + \gamma = 180°,$$

$$\alpha + y + \beta = 180°$$

i

$$x + y + 120° = 180°.$$

Slijedi da je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 300°$. □

3. Data su četiri broja: $\overline{ABBCD}$, $\overline{BAC}$, $\overline{AC}$ i C. Počevši od drugog, svaki broj je jednak proizvodu cifara prethodnog. Odrediti o kojim brojevima je riječ. (Različita slova označavaju različite cifre.)

Rješenje: Kako je $A \cdot C = C$ to je $C = 0$ ili $A = 1$. Ako je $C = 0$, tada je i proizvod cifara broja $\overline{ABBCD}$ jednak 0, što nije tačno. Dakle, $A = 1$. Kako je $B \cdot C = \overline{1C} = 10 + C$, to je $(B-1)C = 10$. Odavde zaključujemo da je $C = 2$ ili $C = 5$. Ako je $C = 2$, tada je $B = 6$ i proizvod cifara broja $\overline{ABBCD}$ je 612. Ali taj proizvod ne može biti 612 jer broj 612 ima prost djelilac 17, te u ovom slučaju nema rješenja. Ako je $C = 5$, tada je $B = 3$ i $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot D = 315$, odakle je $D = 7$, pa su traženi brojevi 13357, 315, 15, 5. □

4. Da li zbir kvadrata dva cijela broja pri dijeljenju sa 4 može dati ostatak 3? Obrazložiti odgovor.

Rješenje: Primijetimo da pri dijeljenju sa 4 ostatak može biti 0 ili 1 ili 2 ili 3. Dakle, svaki cijeli broj x može se napisati u obliku $x = 4k + l$, gdje je $l \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dobijamo da pri dijeljenju sa 4 broja $x^2 = 16k^2 + 8kl + l^2$ ostatak može biti 0 ili 1, odnosno $x^2 = 4m$ ili $x^2 = 4m + 1$. Slijedi da je $x^2 + y^2 = 4m_1 + k_1 + 4m_2 + k_2$, za neke nenegativne cijele brojeve m_1 i m_2, i $k_1, k_2 \in \{0, 1\}$, pa je $x^2 + y^2 = 4(m_1 + m_2) + (k_1 + k_2) = 4m_3 + k_3$, gdje je $k_3 = k_1 + k_2 \in \{0, 1, 2\}$. Dakle, ostatak pri dijeljenju zbira kvadrata dva cijela broja sa 4 ne može biti jednak 3. □