**Prirodno-matematički fakultet**
**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**

# OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE
za VIII razred osnovne škole

**1.** Izračunati
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right).$$

**Rješenje:** Uočimo da je
$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1^2-\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)=\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Slijedi
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2015}\right)\left(1+\frac{1}{2015}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\boxed{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\boxed{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}\cdot\boxed{\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}}\cdot\ldots\cdot\boxed{\frac{2015}{2014}\cdot\frac{2014}{2015}}\cdot\frac{2016}{2015}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2016}{2015}$$
$$=\frac{1008}{2015}.$$

□

**2.** Odrediti najmanji prirodan broj koji podijeljen sa 2 daje ostatak 1, podijeljen sa 3 daje ostatak 2, podijeljen sa 4 daje ostatak 3, itd. i, najzad, podijeljen sa 10 daje ostatak 9.

**Rješenje:** Neka je $n$ traženi broj. Uočimo da je broj $n+1$ djeljiv sa $2,3,4,\ldots,9,10$, pa je $n+1$ najmanji zajednički sadržalac brojeva $2,3,4,\ldots,9,10$, odnosno
$$n+1=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7,$$
odnosno
$$n=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7-1=2519.$$
□

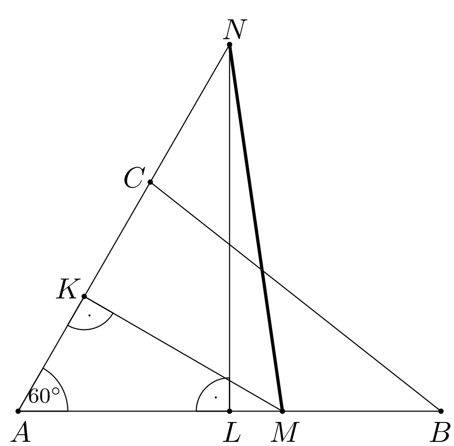
**3.** Od 8 kuglica, polovina njih ima jednu, a druga polovina ima drugu težinu. Kako, koristeći vagu bez tegova, u najviše 2 mjerenja možemo naći dvije kuglice različitih težina?

**Rješenje:** Kuglice numerišimo brojevima $1, 2, 3, \ldots, 8$. Prvo postavimo po 4 kuglice na dvije strane vage. Na jednoj su kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$, a na drugoj kuglice označene sa $5, 6, 7, 8$. Ako je ravnoteža, tada se na oba kraja nalaze po dvije teške i dvije lake kuglice. Uzmemo sada 4 kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$ (od njih su dvije lake i dvije teške) i postavimo po dvije na dvije strane vage. Tada postoje dvije mogućnosti: (I) Vaga je u ravnoteži. Onda su na svakoj od strana po jedna teška i jedna laka kuglica i tada imamo par kuglica različitih težina. (II) Vaga nije u ravnoteži i tada su na jednoj strani obje kuglice lake, a na drugoj su obje teške. Uzimajući po jednu kuglicu sa obje strane, dobijamo dvije tražene kuglice.

Ako je već u prvom mjerenju (po 4 kuglice) neravnoteža, tada su na jednoj strani (onoj koja preteže) bar 3 teške kuglice. Pretpostavimo da pretežu kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$. Tada uzimamo te 4 kuglice sa teže strane i postavljamo ih po dvije na razne stane vage, na jednu stranu kuglice označene brojevima $1, 2$, a na drugu kuglice označene brojevima $3, 4$. Ako je ravnoteža, onda su po dvije teške kuglice na svakoj strani, dakle teške su kuglice $1, 2, 3, 4$, a lake $5, 6, 7, 8$ i možemo uzeti par laka–teška, jednu iz prve, a drugu iz druge grupe. Ako je neravnoteža onda su na "težoj" strani dvije teške kuglice, a na "lakoj" jedna teška i jedna laka kuglica i opet imamo traženi par, to je par kuglica koje su postavljene na stranu za koju se ispostavilo da je "lakša". $\square$

**4.** Ugao kod tjemena $A$ trougla $\triangle ABC$ iznosi $60^\circ$. Normala u središtu $L$ stranice $AB$ siječe pravu $AC$ u tački $N$, a normala u središtu $K$ stranice $AC$ siječe pravu $AB$ u tački $M$. Dokazati da je $|MN| = |BC|$.

**Rješenje:** Posmatrajmo pravougli trougao $\triangle ALN$ (slika 1.).




Slika 1.

Ugao $\angle LAN = 60^\circ$, pa je $|AN| = 2|AL| = |AB|$. Slično, u pravouglom trouglu $\triangle AKM$ ugao $\angle MAK = 60^\circ$, pa je $|AM| = 2|AK| = |AC|$. Slijedi da su trouglovi $\triangle ABC$ i $\triangle ANM$ podudarni, jer je $|AN| = |AB|$, $\angle MAN = \angle CAB$ i $|AM| = |AC|$, pa slijedi da je $|BC| = |MN|$. $\square$