Prirodno-matematički fakultet

Društvo matematičara i fizičara Crne Gore

OLIMPIJADA ZNANJA 2015

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za IX razred osnovne škole

1. Izračunaj

$$2015^2 - 2013^2 + 2011^2 - 2009^2 + \ldots + 7^2 - 5^2 + 3^2 - 1^2.$$

Rješenje: Očigledno je da zadati broj sadrži 504 razlike kvadrata pa traženi zbir možemo pisati kao:

$$\begin{aligned}
& 2015^2 - 2013^2 + 2011^2 - 2009^2 + \ldots + 7^2 - 5^2 + 3^2 - 1^2 \\
= \; & (2015 - 2013)(2015 + 2013) + (2011 - 2009)(2011 + 2009) + \ldots + \\
& +(7 - 5)(7 + 5) + (3 - 1)(3 + 1) \\
= \; & 2(2015 + 2013 + 2011 + 2009 + \ldots + 5 + 3 + 1).
\end{aligned}$$

Dobijene sabirke u zagradi saberimo na sljedeći način: prvi i posljednji (2015+1), drugi i pretposljednji (2013+3) i tako redom (do 1009+1007). Dobijamo 504 zbira koji su jednaki 2016 pa je traženi zbir jednak $2 \cdot 504 \cdot 2016 = 2032128$. □

2. Od 8 kuglica, polovina njih ima jednu, a druga polovina ima drugu težinu. Kako, koristeći vagu bez tegova, u najviše 2 mjerenja možemo naći dvije kuglice različitih težina?

Rješenje: Kuglice numerišimo brojevima $1, 2, 3, \ldots, 8$. Prvo postavimo po 4 kuglice na dvije strane vage. Na jednoj su kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$, a na drugoj kuglice označene sa $5, 6, 7, 8$. Ako je ravnoteža, tada se na oba kraja nalaze po dvije teške i dvije lake kuglice. Uzmemo sada 4 kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$ (od njih su dvije lake i dvije teške) i postavimo po dvije na dvije strane vage. Tada postoje dvije mogućnosti: (I) Vaga je u ravnoteži. Onda su na svakoj od strana po jedna teška i jedna laka kuglica i tada imamo par kuglica različitih težina. (II) Vaga nije u ravnoteži i tada su na jednoj strani obje kuglice lake, a na drugoj su obje teške. Uzimajući po jednu kuglicu sa obje strane, dobijamo dvije tražene kuglice.

Ako je već u prvom mjerenju (po 4 kuglice) neravnoteža, tada su na jednoj strani (onoj koja preteže) bar 3 teške kuglice. Pretpostavimo da pretežu kuglice označene brojevima $1, 2, 3, 4$. Tada uzimamo te 4 kuglice sa teže strane i postavljamo ih po dvije na razne stane vage, na jednu stranu kuglice označene brojevima $1, 2$, a na drugu kuglice označene brojevima $3, 4$. Ako je ravnoteža, onda su po dvije teške kuglice na svakoj strani, dakle teške su kuglice $1, 2, 3, 4$, a lake $5, 6, 7, 8$ i možemo uzeti par laka–teška, jednu iz prve, a drugu iz druge grupe.

Ako je neravnoteža onda su na "težoj" strani dvije teške kuglice, a na "lakoj" jedna teška i jedna laka kuglica i opet imamo traženi par, to je par kuglica koje su postavljene na stranu za koju se ispostavilo da je "lakša". $\square$

3. Neka su p, q i r prosti brojevi, takvi da je $5 \leqslant p < q < r$. Ako je $2p^2 - r^2 \geqslant 49$ i $2q^2 - r^2 \leqslant 193$, odrediti brojeve p, q i r.

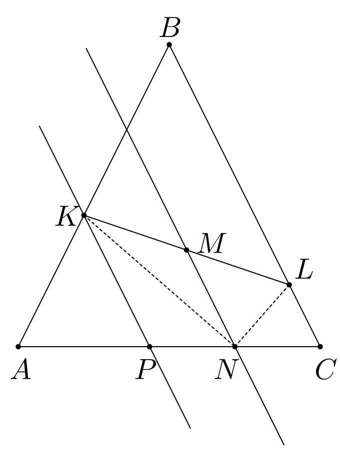
Rješenje: Iz datih relacija imamo $2q^2 - 193 \leqslant r^2 \leqslant 2p^2 - 49$, pa je i $q^2 - p^2 \leqslant 72$. S druge strane, iz uslova da je $5 \leqslant p < q < r$ dobijamo da je $r \geqslant 11$, pa je $2p^2 \geqslant 49 + 121 = 170$, odakle je $p \geqslant 11$. Kako je $(q-p)(q+p) \leqslant 72$ i $q-p = 2$ ili $q-p \geqslant 4$, imamo dvije mogućnosti:
i) $q - p = 2$ i $q + p \leqslant 36$, pa je $(p, q) = (11, 13)$ ili $(17, 19)$;
ii) $q - p \geqslant 4$ i $q + p \leqslant 18$, što je u kontradikciji sa $p \geqslant 11$.

Ako je $(p, q) = (11, 13)$, tada je $145 \leqslant r^2 \leqslant 193$, pa je $r = 13 = q$, što nije tačno jer su p, q i r različiti prosti brojevi.

Ako je $(p, q) = (17, 19)$, tada je $529 \leqslant r^2 \leqslant 529$, pa je $r = 23$. Odavde zaključujemo da je tražena trojka prostih brojeva $p = 17, q = 19, r = 23$. $\square$

4. Na kracima AB i BC jednakokrakog trougla $\triangle ABC$ date su tačke K i L (K je tačka na stranici AB, a L na stranici BC), takve da je $|AK| + |CL| = |KL|$. Kroz središte M duži KL konstruisana je prava paralelna sa BC, koja siječe pravu AC u tački N. Odrediti ugao $\angle KNL$.

Rješenje: Neka prava kroz tačku K paralelna stranici BC siječe stranicu AC u tački P. (slika 1.)



Slika 1.

Tada je $|KP| = |AK|$. Očigledno, MN je srednja linija trapeza $KPCL$. Zbog toga je

$$|MN| = \frac{1}{2}(|LC| + |KP|) = \frac{1}{2}(|LC| + |AK|) = \frac{1}{2}|KL| = |MK| = |ML|.$$

Dakle, M je centar kruga opisanog oko trougla $\triangle KNL$. Slijedi, ugao $\angle KNL$ je prav. $\square$